Paralelism și coliniaritate – demonstrații vectoriale

Matematică - Geometrie

www.enciclopul.ro

1 Relația dintre vectori, drepte paralele și puncte coliniare

Teorema 1. *Dacă doi vectori $\overrightarrow{u}$ și $\overrightarrow{v}$ din plan sunt paraleli, atunci dreptele lor suport sunt fie paralele, fie confundate.*

Demonstrație. Dacă $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$, înseamnă că $\delta(\overrightarrow{u}) = \delta(\overrightarrow{v})$, ceea ce duce la concluzia că, aplicați în același punct O, cei doi vectori au aceeași dreaptă suport d.

Acum, dacă mutăm originea vectorului $\overrightarrow{v}$ într-un punct $O' \neq O$, avem două cazuri:

a) Dacă $O' \in d$, atunci ambii vectori au ca dreaptă suport d;

b) Dacă $O' \in \mathcal{P} \setminus d$, atunci vectorul $\overrightarrow{v}$ are ca dreaptă suport pe d', dar cum $\delta(\overrightarrow{u}) = \delta(\overrightarrow{v})$, înseamnă că $d' \parallel d$.

Așadar, dreptele suport ale celor doi vectori sunt fie identice, fie paralele.

Teorema 2. *Fie A, B, $C \in \mathcal{P}$ și se știe că $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$. În aceste condiții, punctele A, B, C sunt coliniare, nu neapărat în această ordine.*

Demonstrație. Folosind Teorema 1., este adevărat că dreptele AB și AC sunt paralele sau confundate. Dar se știe că $\operatorname{card} AB \cap AC \geq \operatorname{card}\{A\} = 1$, prin urmare AB și AC nu pot fi paralele. Ceea ce înseamnă că dreptele sunt confundate, de unde obținem că $A - B - C$ sunt coliniare.

Proprietatea 1. *Fie d o dreaptă și A, B, $C \in d$. Sunt adevărate relațiile:*

a) Punctul A aparține segmentului (BC) dacă și numai dacă $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AC}$;

b) Punctul C aparține semidreptei $(AB$ dacă și numai dacă $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AC}$.

Definiția 1. *Doi vectori $\overrightarrow{\omega}$ și $\overrightarrow{\psi}$ se numesc liniar independenți dacă nu există un număr $\lambda \in \mathbb{R}$ pentru care $\overrightarrow{\omega} = \lambda \overrightarrow{\psi}$.*

Proprietatea 2. *Dacă $\overrightarrow{\omega}$ și $\overrightarrow{\psi}$ sunt doi vectori liniar independenți, atunci direcțiile lor sunt diferite, adică $\delta(\overrightarrow{\omega}) \neq \delta\left(\overrightarrow{\psi}\right)$, prin urmare dreptele lor suport sunt concurente.*

Teorema 3. *Fie* $\overrightarrow{\omega}$ *și* $\overrightarrow{\psi}$ *doi vectori nenuli, liniar independenți din plan. Fie* $\overrightarrow{\zeta}$ *un alt vector din plan, atunci există și sunt unice numerele* α, $\beta \in \mathbb{R}$ *pentru care este adevărată relația:*

$$\overrightarrow{\zeta} = \alpha\overrightarrow{\omega} + \beta\overrightarrow{\psi}$$

Demonstrație. **Existența:** Fie O un punct în care aplicăm $\overrightarrow{\omega}$, $\overrightarrow{\psi}$ și $\overrightarrow{\zeta}$, astfel încât $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\omega}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{\psi}$ și $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\zeta}$. Ducem paralelele prin B la OA și OC, pe care le notăm cu d și g. Astfel, avem $d \cap OA = \{M\}$ și $d \cap OC = \{N\}$.

Este adevărat că există $\alpha \in \mathbb{R}$, pentru care $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA}$, fiindcă O, A, M coliniare. Similar, există $\beta \in \mathbb{R}$, pentru care $\overrightarrow{ON} = \beta\overrightarrow{OC}$. Dar $OMBN$ este paralelogram din construcție, prin urmare, conform Regulii paralelogramului:

$$\overrightarrow{OB} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OC}$$

Înlocuind cu notațiile anterioare:

$$\overrightarrow{\zeta} = \alpha\overrightarrow{\omega} + \beta\overrightarrow{\psi}$$

Unicitatea: Fie (α,β), $(\rho,\chi) \in \mathbb{R}^2$ două perechi de numere reale care satisfac relația cerută. Înseamnă că putem scrie condiția:

$$\alpha\overrightarrow{\omega} + \beta\overrightarrow{\psi} = \rho\overrightarrow{\omega} + \chi\overrightarrow{\psi}$$

Adică:

$$(\alpha - \rho)\,\overrightarrow{\omega} = (\chi - \beta)\,\overrightarrow{\psi}$$

Presupunem $\alpha - \rho \neq 0$, prin urmare:

$$\overrightarrow{\omega} = \frac{\chi - \beta}{\alpha - \rho}\overrightarrow{\psi}$$

Care contravine cu liniar independența. Prin urmare $\alpha = \rho$. De unde:

$$(\chi - \beta)\,\overrightarrow{\psi} = \overrightarrow{0}$$

De unde, cum $\overrightarrow{\psi}$ nenul, $\chi = \beta$.

Definiția 2. *O pereche* $P = \left(\overrightarrow{\omega},\overrightarrow{\psi}\right)$ *de vectori liniar independenți din plan se numește o bază pentru orice alt vector din plan exprimat în funcție de aceștia.*

Proprietatea 3. *Doi vectori* $\overrightarrow{v}$ *și* $\overrightarrow{\varepsilon}$ *sunt paraleli, dacă și numai dacă există un număr real* α *pentru care putem scrie* $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{\varepsilon}$.

Proprietatea 4. *Fie* $P\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\right)$ *o bază în plan. Doi vectori* $\overrightarrow{u} = m_1\overrightarrow{a} + n_1\overrightarrow{b}$ *și* $\overrightarrow{v} = m_2\overrightarrow{a} + n_2\overrightarrow{b}$ *sunt paraleli dacă și numai dacă este adevărată relația:*

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

2 Sisteme de coordonate baricentrice și triliniare în plan

Definiția 3. *Fie $\mathcal{P}$ un plan în care fixăm ΔABC. Fie M un alt punct din planul $\mathcal{P}$. Atunci tripletul (u_1,u_2,u_3) reprezintă coordonatele baricentrice ale punctului $\mathcal{P}$ în raport cu ΔABC dacă și numai dacă sunt îndeplinite condițiile:*
a) $u_1 + u_2 + u_3 = 1$;
b) $u_1\overrightarrow{A} + u_2\overrightarrow{B} + u_3\overrightarrow{C} = \overrightarrow{M}$, *indiferent de reperul ales pentru vectorii de poziție.*

Definiția 4. *Numim sistem de coordonate baricentrice un plan $\mathcal{P}$ în care fixăm ΔABC, cu proprietatea că fiecare din punctele planului $\mathcal{P}$ are o combinație unică de coordonate baricentrice.*

Proprietatea 5. *Dacă $M\,(u_1,u_2,u_3)$ este un punct într-un sistem de coordonate baricentrice, atunci M este centrul de masă al sistemului de puncte de masă (u_1A,u_2B,u_3C).*

Proprietatea 6. *Dacă $A\,(x_A,y_A)$, $B\,(x_B,y_B)$ și $C\,(x_C,y_C)$ sunt reperele unui sistem de coordonate baricentrice și $P\,(u_1,u_2,u_3)$ este un punct în plan. Atunci, este adevărat că:*

$$(x_P,y_P) = u_1\,(x_A,y_A) + u_2\,(x_B,y_B) + u_3\,(x_C,y_C)$$

Proprietatea 7. *Fie π un sistem de coordonate baricentrice în plan, determinat de ΔABC. Alegem un punct în plan $P\,(u_1,u_2,u_3)$. În aceste condiții sunt adevărate relațiile:*
a) $u_1,u_2,u_3 > 0 \Longleftrightarrow P \in Int\,(\Delta ABC)$;
b) $u_1 = 0,u_2 \neq 0,u_3 \neq 0 \Longleftrightarrow P \in BC \setminus \{B,C\}$;
c) $u_1 \neq 0,u_2 = 0,u_3 \neq 0 \Longleftrightarrow P \in CA \setminus \{C,A\}$;
d) $u_1 \neq 0,u_2 \neq 0,u_3 > 0 \Longleftrightarrow P \in AB \setminus \{A,B\}$.
e) $u_1 = 0,u_2 = 0,u_3 = 1 \Longleftrightarrow P = C$;
f) $u_1 = 1,u_2 = 0,u_3 = 0 \Longleftrightarrow P = A$;
g) $u_1 = 0,u_2 = 1,u_3 = 0 \Longleftrightarrow P = B$;
h) $u_1 < 0 \lor u_2 < 0 \lor u_3 < 0 \Longleftrightarrow P \in Ext\,(\Delta ABC)$.

Proprietatea 8. *Fie ΔABC triunghiul care determină un sistem de coordonate baricentrice π. Alegem M_a,M_b,M_c mijloacele laturilor, G centrul de greutate, O centrul cercului circumscris triunghiului, L_a, L_b,L_c picioarele bisectoarelor, I centrul cercului înscris în triunghi, P_a,P_b,P_c picioarele înălțimilor și H ortocentrul triunghiului. Sunt adevărate expresiile coordonatelor baricentrice:*
a) $M_a\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $M_b\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$, $M_c\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$;
b) $G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$;
c) $O\left(\frac{\sin 2A}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C},\frac{\sin 2B}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C},\frac{\sin 2C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}\right)$;
d) $L_a\left(0,\frac{c}{b+c},\frac{b}{b+c}\right)$,$L_b\left(\frac{c}{c+a},0,\frac{a}{c+a}\right)$, $L_c\left(\frac{b}{a+b},\frac{a}{a+b},0\right)$;
e) $I\left(\frac{a}{a+b+c},\frac{b}{a+b+c},\frac{c}{a+b+c}\right)$;

f) $P_a\left(0,\frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C},\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C}\right)$, $P_b\left(\frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} C+\operatorname{tg} A},0,\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} C+\operatorname{tg} A}\right)$,
$P_c\left(\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B},\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B},0\right)$;

g) $H\left(\frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C},\frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C},\frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C}\right)$.

Proprietatea 9. *Fie $U(u_1,u_2,u_3)$, $V(v_1,v_2,v_3)$ și $W(w_1,w_2,w_3)$ trei puncte în sistemul de coordonate baricentrice π. Avem că $U-V-W$ sunt coliniare dacă și numai dacă:*

$$u_1v_2w_3+u_2v_3w_1+u_3v_1w_2=u_3v_2w_1+u_1v_3w_2+u_2v_1w_3$$

Observația 1. *În spatele acestei relații se ascunde un rezultat numit ecuația baricentrică, scris folosind noțiunea de determinant:*

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=0$$

Definiția 5. *Fie ΔABC un triunghi fixat într-un plan $\mathcal{P}$ și M un punct în acest plan. Notăm $\gamma_a,\gamma_b,\gamma_c$ distanțele de la punctul P la BC, CA, respectiv AB. În aceste condiții, coordonatele triliniare absolute ale punctului P se notează $(\gamma_a,\gamma_b,\gamma_c)$.*

Proprietatea 10. *Orice sistem de coordonate baricentrice π este simultan un sistem de coordonate triliniare σ.*

Definiția 6. *Fie $P(\gamma_a,\gamma_b,\gamma_c)$ un punct în sistemul de coordonate triliniare σ. Considerăm trei numere reale τ_a, τ_b, τ_c, pentru care $\gamma_a{:}\gamma_b{:}\gamma_c=\tau_a{:}\tau_b{:}\tau_c$, în aceste condiții coordonatele triliniare relative ale punctului P se notează $(\tau_a{:}\tau_b{:}\tau_c)$.*

Observația 2. *Coordonatele triliniare absolute ale unui punct joacă și rolul coordonatelor triliniare relative. Orice punct are exact un set de coordonate triliniare absolute și o infinitate de seturi de coordonate triliniare relative. Notația coordonatelor triliniare relative a fost introdusă pentru a exprima mai sintetic coordonatele triliniare ale unui punct, care, sunt mereu utlizate ca măsuri ale unor rapoarte, nu ale unor distanțe. De aceea, de exemplu, punctul $P(2,4,6)$ se poate exprima ca $P(1{:}2{:}3)$.*

Proprietatea 11. *Fie $P(\gamma_a,\gamma_b,\gamma_c)$ un punct într-un sistem de coordonate triliniare σ. Considerăm un sistem de coordonate baricentrice π peste sistemul de coordonate triliniare σ. În aceste condiții, coordonatele baricentrice ale punctului P sunt $(a\gamma_a,b\gamma_b,c\gamma_c)$.*

Proprietatea 12. *Punctele $X(x_a{:}x_b{:}x_c)$, $Y(y_a{:}y_b{:}y_c)$ și $Z(z_a{:}z_b{:}z_c)$ sunt în planul unui sistem de coordonate triliniare σ. Aceste puncte sunt coliniare dacă și numai dacă este adevărată relația:*

$$x_ay_bz_c+x_by_cz_a+x_cy_az_b=x_cy_bz_a+x_ay_cz_b+x_by_az_c$$

Observația 3. *Similar cu coordonatele baricentrice, această relație provine din ecuația triliniară relativă, care se poate exprima:*

$$\begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{vmatrix} = 0$$

3 Probleme de paralelism și concurență rezolvate vectorial sau baricentric

În cele ce urmează, ne vom ocupa de un set de probleme cu enunțuri sintetice care cer demonstrarea unor paralelisme sau coliniarități, în ale căror rezolvări vom folosi cunoștințele despre vectori și coordonate baricentrice/triliniare discutate anterior. Problemele notate cu asterisc (*) pot fi reținute și aplicate ca rezultate teoretice fără demonstrație în concurs, iar cele notate cu semnul exclamării (!) au un grad sporit de dificultate.

Problema *1. *Demonstrați că în ΔABC, centrul cercului circumscris O, ortocentrul H și centrul de greutate G sunt coliniare.*

Dreapta lui Euler

Indicație. Coordonatele baricentrice relative ale celor trei puncte importante din triunghi sunt:

- $O\,(\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C)$;
- $H\,(\operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C)$;
- $G\,(1:1:1)$.

Scriind relația coliniarității baricentrice, se rezolvă problema.

Problema *2. *Demonstrați că în ΔABC, punctul lui Nagel N, centrul cercului înscris I și centrul de greutate G sunt coliniare.*

Dreapta lui Nagel

Indicație. Punctul lui Nagel N este intersecția dreptelor care unesc un vârf al triunghiului cu punctele de contact ale cercurilor exînscrise cu laturile.

Coordonatele baricentrice relative ale celor trei puncte sunt:

- $N\,(p-a : p-b : p-c)$;
- $I\,(a:b:c)$;
- $G\,(1:1:1)$.

Scriind relația coliniarității baricentrice, se rezolvă problema.

Problema 3. *Notăm K punctul lui Lemoine al ΔABC. Determinați coordonatele baricentrice și triliniare relative ale punctului K. Numim punctul lui Lemoine punctul de concurență al celor trei simediane într-un triunghi.*

***

Soluție. Cum K se găsește la intersecția simedianelor în ΔABC, el respectă proprietatea de loc geometric a tuturor simedianelor. Prin urmare, înseamnă că distanțele de la punctul K la laturile triunghiului sunt proporționale cu lungimile acestuia.

Alegem σ un sistem de coordonate triliniare centrat pe laturile triunghiului în planul $\mathcal{P}$ acestuia. În aceste condiții, coordonatele triliniare relative ale punctului K în sistemul de coordonate σ sunt $(a{:}b{:}c)$.

Dar, conform proprietății mai sus menționate, putem calcula coordonatele baricentrice ale punctului K în sistemul de coordonate π, suprapus lui σ.

$$P_\sigma\left(a{:}b{:}c\right) = P_\pi\left(a^2{:}b^2{:}c^2\right)$$

Problema !4. *Fie $\mathcal{S}$ un spațiu și O un punct fixat în $\mathcal{S}$. Fie $\Omega\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ un sistem cartezian cu centrul în O, determinat de trei versori aflați în plane perpendiculare. Numim $\Gamma\left(\overrightarrow{\omega},\overrightarrow{\psi},\overrightarrow{\chi}\right)$ sistemul de coordonate proprii ale punctului P, cu proprietatea că, dacă $P_\Omega\left(a,b,c\right)$, atunci vectorii sistemului de coordonate propriu Γ: $\overrightarrow{\omega} = a\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{\psi} = b\overrightarrow{j} + b\overrightarrow{k}$ și $\overrightarrow{\chi} = c\overrightarrow{k} + c\overrightarrow{i}$. Determinați o formulă de conversie între coordonatele în sistemul Γ și sistemul cartezian Ω;*

Problemă originală

Soluție. Presupunem că un punct are coordonatele (x,y,z) în sistemul propriu Γ și vrem să i le determinăm în funcție de coordonatele (a,b,c) în sistemul cartezian Ω. Este adevărat că:

$$a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k} = x\left(a\overrightarrow{i} + a\overrightarrow{j}\right) + y\left(b\overrightarrow{j} + b\overrightarrow{k}\right) + z\left(c\overrightarrow{k} + c\overrightarrow{i}\right)$$

Cum versorii $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$ sunt independenți în spațiu, avem sistemul:

$$\begin{cases} a = xa + zc \\ b = xa + yb \\ c = yb + zc \end{cases}$$

De unde obținem că:

$$xa + yb + zc = \frac{a+b+c}{2}$$

Adică, găsim:

$$\begin{cases} x = \frac{a+b-c}{2a} \\ y = \frac{-a+b+c}{2b} \\ z = \frac{a-b+c}{2c} \end{cases}$$

Problema 5. *Considerăm paralelogramul $ABCD$ și G centrul de greutate al ΔABC. Fie M pe segmentul (AD) și D pe segmentul (NC). Să se arate că punctele $G - M - N$ sunt coliniare dacă și numai dacă este adevărată relația:*

$$\frac{CN}{ND} - \frac{AM}{MD} = 2$$

Olimpiada de Matematică, etapa județeană, 2013, clasa a IX-a

Indicație. Alegem ca bază $\left(\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GD}\right)$ și exprimăm vectorii $\overrightarrow{GM}$ și $\overrightarrow{GN}$ în funcție de aceasta, folosind rapoartele orientate și relațiile vectoriale ale centrului de greutate. Aplicăm condiția de coliniaritate.

Problema 6. *Pe laturile (AB) și (AC) ale ΔABC se consideră punctele P și Q, astfel încât $\frac{AP}{PB} = \frac{BC}{AC}$ și $\frac{AQ}{QC} = \frac{BC}{AB}$. Notăm cu I centrul cercului înscris în ΔABC. Demonstrați că punctele $P - I - Q$ sunt coliniare dacă și numai dacă $m(\angle BAC) = 90$.*

Olimpiada de Matematică, etapa locală, Brașov, 2017, clasa a IX-a

Indicație. Aplicăm Reciproca teoremei bisectoarei și Teorema bisectoarei, apoi exprimăm vectorii $\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{PI}$ în funcție de baza $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, apoi aplicăm condiția de coliniaritate.

Problema 7. *Fie $ABCD$ un patrulater convex și punctele $M \in (BC)$, $N \in (CD)$, $P \in (DA)$ și $Q \in (AB)$ astfel încât:*

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{ND} = \frac{PD}{PA} = \frac{QA}{QB} = \mu$$

a) Să se arate că dacă $\mu = 1$, atunci $MNPQ$ este paralelogram;

b) Dacă $MNPQ$ este paralelogram și $\mu \neq 1$, demonstrați că $ABCD$ este paralelogram.

Concursul „Adolf Haimovici”, real-științele naturii, etapa națională, 2019, clasa a IX-a

Indicație. a) Demonstrația sintetică este bine-cunoscută, se demonstrează că laturile opuse sunt paralele și egale, fiind linii mijlocii în două triunghiuri cu aceeași bază.

b) Alegem O un reper în plan. Scriem $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ și exprimăm vectorii în funcție de $\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{OD}$, aleși liniar independenți, și ajungem la $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.